

Matemática I

Transformada de Fourier Exemplos

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Transformada de $e^{-at}u(t)$

Exemplo 1: Determinar a transformada de Fourier da função $x(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$.

Usando a definição da função de Heaviside, $u(t)$, temos

$$e^{-at}u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega t} dx + \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at-j\omega t} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dx \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int e^{-(a+j\omega)t} = -\frac{1}{a+j\omega} \int -(a+j\omega) e^{-(a+j\omega)t} dx = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}$$

Transformada de $e^{-at}u(t)$

Logo

$$X(\omega) = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^b = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{-(a+j\omega)b} - 1 \right)$$

Para que o limite exista é necessário que $\text{Re}(a+j\omega) > 0$. Nessa situação

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(a+j\omega)b} = 0$$

e tem-se

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

Escrevemos

$$e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{a+j\omega}$$